Kartkówka 26.04.2018

Zadanie 1. Znaleźć kresy $\inf_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $\sup_{(x,y)\in D} f(x,y)$ funkcji

$$f(x,y) = 2xy - x^2$$

na kole jednostkowym

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Sposób I. Zbiór D jest domknięty i ograniczony, a więc zwarty. Funkcja f jest ciągła, więc na zwartym zbiorze D przyjmuje swoje kresy. Jeśli ekstremum jest przyjmowane w punkcie $(x,y) \in \operatorname{int} D$, to w tym punkcie zeruje się gradient

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y - 2x \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Łatwo sprawdzamy, że jedynym takim punktem (czyli punktem krytycznym) jest $(0,0)$. W tym punkcie f przyjmuje wartość zero.

Jeśli ekstremum jest przyjmowane w punkcie $(x,y) \in \partial D$, to w tym punkcie gradient jest równoległy do wektora normalnego (x,y), spełnione jest więc równanie

$$y \cdot (2y - 2x) - x \cdot (2x) = 0, \quad \text{czyli } y^2 - xy - x^2 = 0.$$

Ponadto ze względu na warunek $(x,y) \in \partial D$ spełnione jest równanie $x^2 + y^2 = 1$. Z tych dwóch równań widać, że współrzędna x nie może być zerowa, możemy więc pomocniczo oznaczyć $t = y/x$. Z pierwszego równania (po podzieleniu przez y^2) otrzymujemy

$$t^2 - t - 1 = 0, \quad \text{a więc } t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Pozwala to wyliczyć wartość funkcji f w tym punkcie:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2xy - x^2 \\ &= 2(y^2 - x^2) - x^2 \\ &= \frac{2(y^2 - x^2) - x^2}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{2t^2 - 3}{t^2 + 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

W powyższych przekształceniach skorzystaliśmy z $xy = y^2 - x^2$ oraz $x^2 + y^2$.

Porównując liczby 0, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, widzimy, że maksimum musi być drugą, a minimum trzecią z nich.

Sposób II. Zaczynamy jak poprzednio, ale do badania funkcji f na brzegu wykorzystujemy parametryzację okręgu $(x, y) = (\cos t, \sin t)$. W tym celu wprowadzamy pomocniczo funkcję

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = 2\cos t \sin t - \cos^2 t,$$

która przyjmuje te same wartości na przedziale $[0, 2\pi]$ (albo na całym $\mathbb{R}$), co funkcja f na ∂D. Jej ekstrema można znaleźć, rozwiązując równanie

$$g'(t) = 0, \quad \text{czyli } \sin^2 t - \sin t \cos t - \cos^2 t = 0$$

i wykorzystując zależność $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Dalsze obliczenia można prowadzić tak jak w pierwszej wersji.

Uwaga. Jak widać, zadanie okazało się skomplikowane obliczeniowo, chyba ze względu na moją pomyłkę przy przepisywaniu (ocenianie jest więc odpowiednio łagodniejsze). Warto zaznaczyć, że w powyższym rozwiązaniu wyznaczono ekstremalne wartości funkcji f, nie wyznaczając jawnym wzorem punktów ekstremalnych (wystarcza nam wiedza, że znalezione t wyznacza jakieś pary (x, y)) – pozwoliło to nieco skrócić zapis.

Uwaga. Gdyby chcieć, to punkt krytyczny $(0, 0)$ można od razu wykluczyć z listy kandydatów na ekstremum lokalne, gdyż macierz drugiej pochodnej w tym punkcie

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

nie jest ani nieujemnie, ani niedodatnio określona.

Zadanie 2. Podać przykład nieograniczonej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Czy istnieje ciągła funkcja nieograniczona $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ określona na zbiorze D z poprzedniego zadania? Dlaczego?

Funkcją nieograniczoną jest na przykład $f(x, y) = x$.

Na zbiorze D taki przykład nie istnieje, ponieważ na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (które zastosowano w rozwiązaniu poprzedniego zadania) każda funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest ograniczona.